

مقایسه سری‌های مقادیر حدی و جزئی بارش‌های بیشینه روزانه برای تعیین بهترین توزیع احتمالاتی (مطالعه موردی استان‌های تهران و البرز)

حسین ملکی نژاد^۱، مهدی سلیمانی مطلق^۲، اعظم جایدیری^۳، سمیه شاطرآبشوری^۳

۱- دانشیار دانشکده منابع طبیعی، دانشگاه یزد

۲- دانشجوی دکتری آبخیزداری، دانشگاه کاشان

۳- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد آبخیزداری، دانشکده منابع طبیعی دانشگاه یزد

چکیده

تحلیل فراوانی و یا دوره برگشت رخداد‌های بارش و سیلاب از مهم‌ترین گام‌های مدیریت منابع آب و طراحی سازه‌های آبی است. در این تحقیق به منظور انتخاب مناسب‌ترین توزیع فراوانی جهت برآورد مقادیر بارش حداکثر با احتمالات وقوع مشخص، آمار بارش حداکثر سالانه ۵ ایستگاه سینوپتیک استان تهران از آغاز تاسیس گردآوری شد. سپس با استفاده از نرم‌افزار HYFA و MATLAB برای هر سری زمانی در هر ایستگاه با استفاده از روش گشتاور معمولی، ۹ توزیع آماری شامل توزیع‌های نرمال، لوگ نرمال دو پارامتره، لوگ نرمال سه پارامتره، پیرسون نوع سوم، لوگ پیرسون نوع سوم، توزیع گمبل، توزیع مقادیر حد تعمیم یافته، توزیع لجستیک تعمیم یافته، توزیع پارتو تعمیم یافته، با نتایج حاصل از کاربرد سری مقادیر جزئی با توزیع نمایی مقایسه شد. آماره‌های MAE ، $Bias$ ، R^2 ، $RMSE$ و $RRMSE$ (Relative Root Mean Square Error) برای تشخیص بهترین توزیع‌ها در کلیه ایستگاه‌ها مورد استفاده قرار گرفت. نتایج نشان داد در ایستگاه آبعلی و مهرآباد توزیع پارتو تعمیم یافته، در ایستگاه دوشان‌تپه و شمال تهران توزیع لجستیک تعمیم یافته و در ایستگاه کرج توزیع لوگ نرمال سه پارامتره به عنوان توزیع برتر شناخته شد. همچنین دو توزیع نرمال و توزیع نمایی در تعیین بهترین توزیع در منطقه کاملاً ناکارآمد معرفی شد. در پایان با استفاده از آزمون $RRMSE$ ، توزیع مقادیر حد تعمیم یافته بعنوان توزیع غالب برای منطقه شناخته شد.

کلمات کلیدی: بارش بیشینه ۲۴-ساعته، آزمون برازش نکویی، سری مقادیر حدی، سری مقادیر جزئی، آریبی

مقدمه

کافی است داده‌های مورد نظر را با یکی از توابع توزیع تئوری برازش داده و اگر نکویی برازش حاصل شد، با حل تئوری معادله توزیع، مقدار متغیر را به ازاء احتمالات مختلف بدست می‌آید (علیزاده، ۱۳۸۳). بسیاری از توزیع‌ها در بخش میانی هم‌شکل ولی در دنباله‌ها تفاوت زیادی دارند، در نتیجه ممکن است به داده‌های مفروض چندین توزیع را برازش داد و برآوردهای مختلفی از پیشامدهای T ساله را بدست آورد. در این رابطه از روش‌ها و تکنیک‌های علم آمار استفاده می‌شود. در این راستا یکی از روش‌های آماری، استفاده از توزیع‌های فراوانی یا آماری جهت مشخص کردن فراوانی وقوع یا تعداد دفعاتی است که به طور متوسط یک متغیر در مدت زمان مشخص اتفاق می‌افتد (علیزاده، ۱۳۸۳).

متداول‌ترین توزیع‌های مورد استفاده در هیدرولوژی شامل توزیع نرمال، لوگ نرمال دو متغیره، لوگ نرمال سه متغیره، پیرسون نوع سوم، لوگ پیرسون نوع سوم، گمبل، توزیع مقادیر حد تعمیم یافته^۱، توزیع لجستیک تعمیم یافته^۲،

هرگونه طرح و برنامه‌ریزی که در حوزه‌های آبخیز صورت می‌گیرد، باید بر اساس تجزیه و تحلیل داده‌ها و اطلاعات مربوط به هیدرولوژی آن حوزه باشد. با تجزیه و تحلیل داده‌های هیدرولوژیکی که در گذشته اتفاق افتاده و اندازه‌گیری شده‌اند، می‌توان به نتایجی رسید که اگر آن را برای آینده تعمیم دهیم، تصمیم‌گیری و یا پیش‌بینی رفتار حوزه را ساده خواهد ساخت و به روند وقایعی که در آینده اتفاق خواهد افتاد پی‌برد. بنابراین پیش‌بینی چگونگی وقوع یک متغیر در آینده به تجزیه و تحلیل داده‌های مربوط به وقوع آن متغیر در گذشته بستگی دارد (علیزاده، ۱۳۸۳).

هدف اولیه تحلیل فراوانی، ارتباط دادن بزرگی رویدادهای حدی به فراوانی رخداد آنان از راه بهره‌گیری از توزیع‌های آماری می‌باشد (مدرس، ۲۰۰۶، کمپل و همکاران ۱۹۸۴). در واقع تحلیل فراوانی، برآورد این مساله است که چگونه یک رخداد خاص اتفاق خواهد افتاد (علیزاده، ۱۳۸۳). در هیدرولوژی توزیع‌های احتمالاتی بسیاری وجود دارد که

1- Generalized Extreme Values (GEV)

2- Generalized Logistic

ووگل و همکاران (۱۹۹۳) با استفاده از نظریه گشتاور-های خطی به بررسی تناوب ۳۰ حوزه آبخیز استرالیا پرداختند و ۱۶۱ ایستگاه آب‌سنجی را در سرتاسر این کشور بررسی کردند نتایج این پژوهش، توزیع مقادیر حد تعمیم یافته و یکبای بهترین تقریب را با داده‌های جریان در مناطقی از استرالیا دارا هستند، عمده بارش این مناطق ناشی از رگبارهای زمستانه و برای دیگر حوزه‌های آبخیز استرالیا توزیع‌های پارتو تعمیم یافته و یکبای بهترین برازش را با داده‌های مشاهداتی جریان نشان دادند. همچنین ووگل و همکاران (۱۹۹۶) با مطالعه در ۱۴۹۰ منطقه کل ایالت متحده توزیع‌های لوگ نرمال سه متغیره و مقادیر عمومی حد و لوگ پیرسون نوع سه را توصیه کردند.

الیاسن (۱۹۹۱) برای برآورد پارامترهای توزیع گامبل از روش گشتاورهای معمولی^۶ استفاده کرد. کومار و همکاران (۲۰۰۳) با استفاده از روش گشتاورهای خطی معادله منطقه‌ای را برای حوزه رودخانه براهماپوترا شمالی کشور بنگلادش بدست آوردند و نتیجه گرفتند که توزیع مقادیر حد تعمیم یافته مناسب‌ترین توزیع برای حوزه مورد مطالعه است (رستمی، ۱۳۸۴). اسلامیان و چاوشی (۱۳۸۲) از روش گشتاورهای خطی به منظور تحلیل فراوانی منطقه‌ای سیل در دوره‌های برگشت مختلف در حوزه آبریز مرکزی بهره‌گیری کردند. آنان توابع توزیع لجستیک تعمیم یافته، میزان حدی تعمیم یافته و لوگ نرمال ۳ پارامتره را به عنوان بهترین توابع مناطق همگن معرفی کردند. مدرس (۲۰۰۶) به منظور گروه-بندی بارش و توابع توزیع فراوانی از روش گشتاورهای خطی بهره‌گیری کرد. وی ۸ گروه بارشی را در ایران تشخیص داده و توابع نرمال ۳ پارامتره را برای کل ایران پیشنهاد کرد.

از آنجایی که برای مناطق مختلف با توجه به ویژگی‌های منطقه و بسته به منطقه موردنظر، توزیع و یا توزیع‌های خاصی انتخاب و پیشنهاد شده است، لذا هدف اصلی این تحقیق انتخاب مناسب‌ترین توزیع با مقایسه سری مقادیر حد و سری مقادیر جزئی، در منطقه مورد مطالعه می‌باشد.

توزیع پارتوی تعمیم یافته^۱ است. در این توزیع‌ها پس از بدست آوردن مقدار حداکثر متغیر مورد نظر و با داشتن احتمال وقوع یا دوره بازگشت آن، می‌توان منحنی مربوطه را رسم و از روی آن مقادیر متغیر مورد نظر با دوره بازگشت مشخص را تعیین کرد. مزیت تطابق توزیع فراوانی داده‌های موجود با یکی از توزیع‌های آماری، این است که آمار محدود موجود را می‌توان توسعه داد و به روند وقایعی پی‌برد که در آینده اتفاق خواهد افتاد (مهدوی، م ۱۳۸۱).

تاریخچه بهره‌گیری از توزیع‌های آماری به بررسی هیزن و مارگوییچ بر می‌گردد. گوپتا روش‌هایی را برای پیدا کردن توزیع‌های مناسب ارائه کرد و مک کوپین و راولز (۱۹۷۹) روش‌های تحلیل فراوانی را طبقه‌بندی کردند. مک کوپین (۱۹۷۹) واژه‌های آماری مورد بهره‌گیری در تحلیل فراوانی را مشخص و تشریح کرد. کمپیل و سیدل (۱۹۸۴) برای طراحی راه کارهای دفع سیلاب از توزیع‌های آماری بهره گرفتند. سیسینی و همکاران (۱۹۷۳) در ایتالیا توزیع‌های لوگ نرمال دو متغیره (LN2)^۲ و لوگ نرمال سه متغیره (LN3)^۳، پیرسون نوع سوم (P3)^۴ و توزیع مقادیر حد تعمیم یافته (GEV)^۵ را برای ۱۰۸ ایستگاه آب‌سنجی با طول دوره آماری ۲۷ سال بررسی کردند و از آزمون‌های χ^2 ، کلموگرف-اسمیرنوف و آزمون اندرسون-دارلینگ برای گزینش توزیع آماری بهره گرفتند و در نهایت توزیع LN2 توسط آزمون کای، و توزیع GEV و LN3 توسط سایر آزمون‌ها گزینش شد. بیرد (۱۹۷۴) سیل ۱۰۰۰ ساله را در ۳۰۰ ایستگاه آب‌سنجی آمریکا مورد بررسی قرار داد و به این نتیجه رسید که توزیع‌های لوگ نرمال دو متغیره و لوگ نرمال سه متغیره بیشترین سازگاری را دارند. دلوند و همکاران (۱۹۸۸) استفاده از توزیع‌های لوگ نرمال دو متغیره و لوگ نرمال سه متغیره را برای حداکثر رودخانه‌های ایالت ایندیانا توصیه کردند. اونزد بایزد (۱۹۹۰) با بررسی ۱۹ منطقه در سطح جهان با استفاده از روش گشتاور L، توزیع مقادیر حد تعمیم یافته را توصیه کردند. گرینکراس و آدامفسکی (۱۹۹۲) با مطالعه در ۵۳ منطقه نیوبرانزویک کانادا توزیع مقادیر حد تعمیم یافته را به عنوان بهترین توزیع پیشنهاد نمودند (ووگل و ویلسون، ۱۹۹۶).

6- Method of Moment (GEV)

1- Generalized Pareto

2- Two-Parameter Lognormal Distribution (LN2)

3- Three-Parameter Lognormal Distribution (LN3)

4- Pearson type III distribution

5- Generalized Extreme Value Distribution

مواد و روش‌ها

منطقه مورد مطالعه

قم، از شرق به استان سمنان و از غرب به استان قزوین محدود می‌شود. شکل (۱) موقعیت جغرافیایی منطقه مورد مطالعه و جدول (۱) مشخصات ایستگاه‌های همدیدی مورد مطالعه در منطقه را مشخص می‌کند.

استان تهران بین $35^{\circ}14'$ تا $36^{\circ}17'$ عرض شمالی و 50° تا $53^{\circ}6'$ طول شرقی قرار گرفته است. این استان از شمال به رشته کوه‌های البرز (استان مازندران)، از جنوب به استان



شکل ۱- نقشه پراکنش ایستگاه‌های مورد مطالعه

جدول ۱- مشخصات ایستگاه‌های همدیدی مورد مطالعه در استان تهران

ایستگاه	میانگین بارش سالانه (mm)	میانگین دمای سالانه (C)	عرض جغرافیایی شمالی	طول جغرافیایی شرقی	ارتفاع متوسط (m)	طول دوره آماری
آبعلی	۵۴۵/۴	۸/۴	$35^{\circ}45'$	$51^{\circ}53'$	۲۴۶۵/۲	۱۹۸۳-۲۰۰۷
دوشان تپه	۲۷۰/۳	۱۷/۹	$35^{\circ}42'$	$51^{\circ}20'$	۱۲۰۹/۲	۱۹۷۲-۲۰۰۷
مهرآباد	۲۳۴/۶	۱۷/۳	$35^{\circ}41'$	$51^{\circ}19'$	۱۱۹۰/۸	۱۹۵۱-۲۰۰۷
کرج	۲۵۷/۵	۱۵	$35^{\circ}55'$	$50^{\circ}54'$	۱۳۱۲/۵	۱۹۸۵-۲۰۰۷
شمال تهران	۴۳۵/۸	۱۵/۵	$35^{\circ}48'$	$51^{\circ}29'$	۱۵۴۹/۱	۱۹۸۸-۲۰۰۷

داده‌های تحقیق

سری مقادیر حدی^۱ که می‌تواند مقادیر حداکثر و یا حداقل در طی مدت مشخصی باشد. سری مقادیر جزئی^۲ شامل داده‌هایی است که از یک حد انتخابی، بزرگتر یا کوچکتر باشند. در آمریکا آنرا Partial duration series (PDS) و در اروپا Peak over threshold (POT) یا اوج فراتر از آستانه می‌نامند. در مورد غرقاب شدن دشت‌های سیلابی می‌توان یک چنین سری آماری را مورد استفاده قرار داد. سری مقادیر کامل^۳ شامل تمامی داده‌ها در طی مدت آمار برداری می‌باشند. این سری‌ها در هیدرولوژی کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرند (مهدوی، ۱۳۸۱).

در این تحقیق از داده‌های بارش ۲۴ ساعته برخی از ایستگاه‌های سینوپتیک استان تهران برای برآورد توزیع سری مقادیر جزئی (توزیع نمایی) و همچنین از سری مقادیر حد مثل بارش حداکثر سالانه ایستگاه‌های مذکور برای برآورد سایر توزیع‌ها جهت مشخص نمودن مناسب‌ترین توزیع فراوانی در برآورد مقادیر بارش حداکثر با احتمالات وقوع مشخص در منطقه مورد مطالعه استفاده شده است.

کاربرد سری مقادیر جزئی با استفاده از توزیع نمایی^۴

در بعضی سال‌ها بارش‌هایی اتفاق می‌افتند که مقدار آن‌ها از مقدار حداکثر در بعضی از سال‌ها بزرگتر است و در نتیجه می‌باید از نظر ایمنی سازه‌ها مد نظر قرار گیرند، این در حالیست که در توزیع‌های آماری تنها حداکثر بارش هر سال جهت پیش‌بینی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای استفاده از این روش بارش‌های بالاتر از یک آستانه در نظر گرفته شده و بدون توجه به سال وقوع، ردیف شده و از رابطه ویبول، میزان احتمال وقوع آن‌ها محاسبه می‌گردد (مهدوی، ۱۳۸۱).

در بررسی بارش با دوره بازگشت معین با استفاده از سال‌های آماری محدود مثلاً ۱۰ سال، یک بارش مبنا (p_0) به نحوی انتخاب می‌شود که سالانه بطور متوسط بین ۳ تا ۵ بار بارش‌های سیلابی بیش از آن اتفاق افتاده باشد. سپس آمار تمام بارش‌ها که بیش از مقدار (p_0) است، استخراج می‌گردد. با مشخص کردن کلیه بارش‌های بیش از مقدار (p_0) که آن‌ها

را با (p_i) نشان می‌دهیم، متوسط وقوع آن‌ها در سال از رابطه زیر محاسبه می‌شود (مهدوی، ۱۳۸۱).

$$\lambda = \frac{M}{N} \quad (1)$$

که در آن M تعداد داده‌های سری جزئی و N تعداد سال‌های آماری می‌باشد. با در نظر گرفتن توزیع نمایی، مقدار β از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\beta = p_i - p_0 = \sum_{i=1}^N \frac{(p_i - p_0)}{M} \quad (2)$$

بارش با دوره بازگشت مورد نظر را می‌توان با رابطه زیر برآورد کرد:

$$P_{Tr} = p_0 + \beta \ln \lambda + \beta \ln T \quad (3)$$

روش‌های برآورد پارامترهای توابع توزیع‌های آماری در سری مقادیر حد

چندین روش برای برآورد پارامترهای توابع توزیع‌های آماری وجود دارد، این روش‌ها عبارت از روش حداکثر درست نمایی، روش کمترین مربعات، روش گرافیکی، روش گشتاورهای معمولی و خطی می‌باشد. در این تحقیق از روش گشتاور معمولی در سری مقادیر حد برای تعیین توزیع آماری استفاده شده است.

روش گشتاورهای معمولی

قدیمی‌ترین و گسترده‌ترین روش شناخته شده برای برازش فراوانی توزیع‌های مشاهداتی روش گشتاورهاست. در روش گشتاورها معادله کلی برای محاسبه گشتاور مرتبه r حول مبدا یک توزیع، $P(x)$ به کار می‌رود.

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r P(x) \cdot dx \quad (4)$$

یا معادله متناظر برای گشتاورهای مرکزی توزیع مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1)^r \cdot P(x) \cdot dx \quad (5)$$

که در آن μ_r گشتاور مرتبه اول حول مبدا می‌باشد.

روش گشتاورها، پارامترهای یک توزیع را از یک نمونه خاص داده‌ها محاسبه می‌کند. این نمونه می‌تواند شاخصی از جامعه اصلی باشد. روش گشتاورها رابطه بین گشتاورها و پارامترهای توزیع را مشخص می‌کند. عموماً

1- Extreme Series

2- Partial Series

3- Complete Series

4- Exponential Distribution (EXP)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+k(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-1-1/k}}{\sigma(1+(1+k(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-1/k})^2} & k \neq 0 \\ \frac{\exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma}))}{\sigma(1+\exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma}))^2)} & k = 0 \end{cases} \quad (11)$$

توزیع پارتو تعمیم یافته (GPA)^۲

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+k(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-1/k} & k \neq 0 \\ 1 - \exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma})) & k = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} (1+k(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-1-1/k} & k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma})) & k = 0 \end{cases} \quad (13)$$

توزیع مقادیر حدی تعمیم یافته (GEV)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\left(1+k\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/k}\right) \left(1+k\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1-1/k} & k \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp\left(-z - \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right) & k = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1+k\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{-1/k}\right) & k \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right) & k = 0 \end{cases} \quad (15)$$

σ, k, μ به ترتیب پارامترهای موقعیت، شکل و مقیاس (میانگین، کشیدگی و واریانس) می باشند.

توزیع لوگ نرمال سه پارامتره (LN3)

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right) \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}{(x-\gamma)\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (17)$$

μ و σ و γ به ترتیب پارامترهای موقعیت، شکل و مقیاس (میانگین، واریانس و کشیدگی) می باشند.

آزمون نکویی برازش به منظور تعیین مناسب ترین توزیع آماری

آزمون نکویی برازش را می توان برای انتخاب توزیعی که به بهترین وجه داده های نمونه را توصیف کند بکاربرد. مهمترین قسمت در تحلیل فراوانی برآورد مقادیر می باشد. برای گزینش بهترین توزیع در یک منطقه می توان توزیعی که در کل برازش بهتری نسبت به بقیه توزیع ها در منطقه نشان می دهد را گزینش کرد. روش های زیادی می تواند برای آزمون توزیع ها مورد بهره گیری قرار گیرد. اما این روش ها نمی توانند به عنوان آزمون های بطور کامل جدا کننده یک توزیع از دیگر توزیع ها باشد. از آزمون هایی که امروزه از آنان برای گزینش توزیع بهره گیری می شود، می توان به آزمون کای وسای χ^2 ، آزمون کلموگروف و اسمیرنوف،

روش گشتاورها به وسیله ایجاد معادله گشتاورهای نظری قابل کاربرد است.

$$k = \frac{E[(x-\mu)]}{\delta^4} \quad (6)$$

$$v = \frac{E[(x-\mu)^3]}{\delta^3} \quad (7)$$

$$S^2 = \text{var}[x] = E[(x-\mu)^2] \quad (8)$$

$$\mu = E[x] \quad (9)$$

که به ترتیب μ, k, v, S^2 عبارت از واریانس، چولگی، کشیدگی و میانگین می باشد. این موارد جزء اصولی ترین مشخصات آماری می باشند. معمولاً تمایل مرکزی توسط میانگین بیان می شود و برای بیان پراکندگی و درجه تقارن از واریانس و ضریب چولگی و ضریب کشیدگی استفاده می شود (محمدی خشویی، ۱۳۸۷). تمایل مرکزی داده ها توسط سه کمیت آماری بیان می شود. متوسط حسابی داده ها یا میانگین قابل اعتمادترین شاخص تمایل مرکزی آنهاست. میزان پراکندگی داده ها توسط واریانس آنها مشخص می شود. این معیار معرف میانگین مربع انحرافات داده ها از میانگین است. هرچه انحراف معیار داده ها کمتر باشد، پراکندگی آنها در اطراف میانگین کمتر خواهد بود (غلامی، ۱۳۷۹).

در حالیکه میانگین و واریانس، گشتاورهای اول و دوم داده ها را تشکیل می دهند، برای بررسی تقارن آنها از گشتاور سوم استفاده می شود و ضریبی به نام چولگی تعریف می شود. اگر یک توزیعی نسبت به یک توزیع متقارن انحراف داشته باشد، آن توزیع را چوله می نامیم. گشتاور چهارم حول میانگین کشیدگی است که بلندی یا کوتاهی آن نسبت به یک توزیع متقارن است (محمدی خشویی، ۱۳۸۷).

توابع احتمال تجمعی و احتمال چگالی

توزیع لاجستیک تعمیم یافته (GLOG)^۲

تابع احتمال تجمعی و تابع احتمال چگالی (GLOG) توسط معادله (۷) و (۸) داده شده است.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(1+k(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-1/k}} & k \neq 0 \\ \frac{1}{1+\exp(-(\frac{x-\mu}{\sigma}))} & k = 0 \end{cases} \quad (10)$$

X_0 بارش مشاهداتی، X_e بارش تخمین زده شده، n تعداد دوره بازگشت می‌باشد.

آماره RRMSE

برای انتخاب بهترین توزیع در یک منطقه می‌توان توزیعی را که در مجموع برازش بهتری نسبت به بقیه توزیع‌ها در منطقه نشان می‌دهد، انتخاب کرد. به عبارت دیگر لازم نیست توزیع مربوطه در همه ایستگاه‌ها بهترین توزیع باشد، بلکه در ایستگاه‌هایی که توزیع مورد نظر بهترین توزیع به شمار نمی‌رود، نایستی اختلاف چشمگیری با بهترین توزیع در آن منطقه نشان دهد (زارعی، ۱۳۷۸).

برای انتخاب بهترین توزیع فراوانی برای داده‌های موجود در کل منطقه بعد از تعیین بهترین توزیع در هر ایستگاه، فرمول RRMSE استفاده شد که معادله آن به صورت زیر است:

$$RMSE = \left[\frac{1}{NS} \times \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{NS} \sum_{j=1}^j \left(\frac{P_{obs} - P_{est}}{P_{obs}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (22)$$

که در آن P_{obs} بارش مشاهده‌ای، P_{est} بارش برآورد شده، NS تعداد ایستگاه‌های مورد مطالعه و j تعداد توزیع‌های بکار برده شده می‌باشد.

نرم‌افزارهای مورد استفاده

به منظور اجرای برخی مراحل پژوهش از نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. برنامه مذکور توانایی اجرای برآورد پارامترهای توابع توزیع‌های متداول لوگ نرمال سه پارامتره، پیرسون نوع سوم، پارتو تعمیم یافته، لجستیک تعمیم یافته و مقادیر حد تعمیم یافته را دارد. ورودی برنامه شامل اطلاعات مربوط به ایستگاه‌های مورد بررسی مانند تعداد سال‌های آماری و حداکثر بارش سالانه در طول دوره آماری می‌باشد. همچنین دیگر نرم‌افزار مورد استفاده، برنامه HYFA می‌باشد که می‌تواند داده‌ها را از طریق فایل یا در زمان اجرا دریافت کرده، تصحیح نموده و ذخیره کند. توسط این برنامه داده‌ها مرتب شده و با استفاده از هفت فرمول تجربی، احتمال وقوع آنها تعیین می‌گردد. سپس داده‌ها را توسط شش تابع

آزمون اندرسون و دارلینگ، آماره Z هاسکینگ و والیس (۱۹۹۳) اشاره کرد.

در این بررسی برای گزینش بهترین توزیع در هر ایستگاه، از مجذور میانگین خطای مربعات^۱، ضریب همبستگی^۲، میانگین خطای مطلق^۳ و آماره اریبی نسبی^۴ و برای گزینش بهترین توزیع منطقه‌ای از آزمون مجذور میانگین خطای مربعات نسبی^۵ بهره‌گیری شده است.

آماره RMSE، یک روش مقایسه‌ای برای برازش توزیع‌های مختلف به داده‌های نمونه است که عبارت از مجذور میانگین خطای مربعات بین حداکثر بارش محاسبه‌ای و مشاهده شده است. در این روش آن توزیعی مناسب‌تر است که دارای مجذور میانگین خطای مربعات کمتری باشد. روش مجذور میانگین خطای مربعات را می‌توان با استفاده از فرمول زیر بدست آورد:

$$RMSE = \left[\frac{\sum (x_0 - x_e)^2}{n} \right]^{1/2} \quad (18)$$

که در آن RMSE مجذور میانگین خطای مربعات، x_0 بارش مشاهداتی، x_e بارش تخمین زده شده، n تعداد دوره بازگشت می‌باشد. آماره ضریب همبستگی، همبستگی بین داده‌ها را تعیین می‌کند. آماره انحراف (اریبی)، اختلاف میانگین داده‌های اندازه‌گیری و محاسبات می‌باشد. آماره میانگین خطای مطلق به طور متوسط ارزش مطلق باقیمانده است. MAE بسیار شبیه به RMSE اما با حساسیت کمتر به اشتباهات بزرگ است. آماره میانگین خطا و ضریب اریبی هرچه به صفر نزدیکتر باشد، توزیع برتر خواهد بود و در آماره R^2 هرچه مقدار آن بیشتر باشد همبستگی بیشتری بین داده‌های مشاهده‌ای و برآورد شده وجود دارد. در ذیل فرمول هر کدام از این آماره‌ها آورده شده است (یانگ و همکاران، ۲۰۰۹).

$$Bias = \frac{\sum_{i=1}^n (X_e - X_0)}{n} \quad (19)$$

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |(X_e) - (X_0)|}{n} \quad (20)$$

$$R^2 = \frac{\sum ((X_e - \bar{X}_e) \times (X_0 - \bar{X}_0))}{\sqrt{(\sum (X_e - \bar{X}_e)^2) \times (\sum (X_0 - \bar{X}_0)^2)}} \quad (21)$$

1- Root Mean Square Error

2- Regression (R^2)

3- Mean Absolute Error (MAE)

4- Bias

5- Relative Root Mean Square Error

توزیع چگالی احتمال برازش داده و پارامترهای توزیع برآورد می‌گردد.

نتایج و بحث

همانگونه که در جدول شماره (۱) مشاهده می‌شود، طول دوره آماری تا سال ۲۰۰۷ برای ایستگاه‌های مختلف متفاوت است. در این تحقیق برای هر سری زمانی در هر ایستگاه با استفاده از نرم‌افزار آماری HYFA و MATLAB بعد از

محاسبه احتمال تجربی داده‌ها به روش هیزن، احتمال نظری آنها نیز با استفاده از ۱۰ نوع توزیع مهم فراوانی شامل توزیع-های نرمال، لوگ نرمال دوپارامتره، پیرسون نوع سوم، لوگ پیرسون نوع سوم، توزیع گمبل، توزیع مقادیر حد تعمیم یافته، توزیع لجستیک تعمیم یافته، توزیع پارتو تعمیم یافته و توزیع نمایی برازش داده شد. مقادیر مربوط به پارامترهای هر توزیع در جدول شماره (۲) آمده است.

جدول ۲- مقادیر پارامترهای توزیع‌های مختلف در ایستگاه‌های مختلف

ایستگاه‌ها					توزیع و پارامتر	
کرج	مهرآباد	شمال تهران	دوشان تپه	آبعلی		
۰/۱۳۸۳۲	۰/۰۲۲۱۵	-۰/۲۸۴۲۱	-۰/۲۲۰۳۳	-۰/۰۲۴۷۷	k	GEV
۷/۸۱۳۸	۷/۱۲۴۶	۱۱/۶۰۳	۶/۷۲۴۱	۹/۵۰۶۱	σ	
۲۱/۳۹۲	۲۱/۵۶۵	۳۳/۸۴۷	۲۳/۶۱	۳۵/۸۶۵	μ	
۰/۲۳۲	۰/۳۴۲	۰/۸۱۱	۰/۲۴	۰/۳۴۲	k	GPA
۱۶/۸۹	۱۶/۴۱۵	۲۰/۸۱۱	۶/۶۸	۲۰/۰۴۲	σ	
۱۳/۴۲۱	۱۳/۹۲	۱۴/۹۹۸	۲۳/۶۹	۲۶/۲۰۵	μ	
-۵/۱۵۶۲	-۸/۲۲۲۱	-۴۷۳/۴۲	-۱۱۹/۳۶	-۰/۹۱۸۶	γ	LN3
۰/۳۴۱	۰/۲۶۹۴	۰/۰۲۲۵	۰/۰۴۷	۰/۲۶۸۳	σ	
۳/۴۱۷	۳/۵۰۱	۶/۲۴	۴/۹۸	۳/۷۰۲۷	μ	
-۰/۱۱۴۲	-۰/۰۹۱۲۳	-۰/۰۰۷۷۴	-۰/۰۱۶	-۰/۰۹۰۹	k	GLOG
۵/۹۵۴۵	۵/۰۴۳۱	۶/۳۳۲	۳/۷۸	۶/۱۴۴	σ	
۲۵/۹۹۴	۲۵/۳۹	۳۷/۸۵	۲۶/۱۶	۴۰/۱۹۷	μ	
۳/۴۸	۳/۷۴	۳/۴۵	۳/۳۳	۳/۵۶	λ	EXP
۷/۱۳	۶/۷۲	۹/۶۲	۶/۶۵	۹/۳۷	β	
۱۴	۱۳	۲۲	۱۵	۲۴	q_0	

ایستگاه‌های آبعلی و مهرآباد توزیع پارتو تعمیم یافته، در ایستگاه شمال تهران توزیع لجستیک تعمیم یافته، در ایستگاه کرج توزیع لوگ نرمال سه پارامتره و در ایستگاه دوشان تپه توزیع نرمال به عنوان توزیع برتر انتخاب گردید.

پس از بدست آوردن توزیع‌های بکار برده شده در این تحقیق، در نهایت با استفاده از آزمون‌های برازش نکویی، بهترین توزیع برای ایستگاه‌های مختلف و برای منطقه بدست آمد. در ادامه به این آزمون‌ها اشاره می‌گردد. همانطور که مقادیر RMSE در جدول شماره (۳) نشان می‌دهد، در

جدول ۳- مقادیر RMSE برای توزیع‌های مختلف به تفکیک در ایستگاه‌های منطقه مورد مطالعه

توزیع	آبعلی	دوشان تپه	شمال تهران	مهرآباد	کرج
GEV	۲/۴۹	۰/۶۶	۲/۴۹	۱/۶۴	۱/۵۸
GPA	۲/۴۸	۰/۸۱	۳/۳۶	۱/۵	۱/۸۹
GLOG	۲/۷۹	۰/۹۶	۱/۷	۲/۱۵	۱/۹۵
LN3	۲/۸۱	۰/۶۹	۲/۸۷	۱/۷	۱/۴۸
GUM	۲/۵۱	۲/۲۱	۳/۵۱	۱/۸۵	۱/۶
LP3	۲/۶۶	۰/۶۷	۳/۰۵	۱/۷۸	۳/۲۴
LN2	۲/۵۲	۱/۷۲	۲/۲۳	۱/۸۵	۱/۶۸
N	۳/۸۴	۰/۵۲	۲/۲۳	۳/۴۴	۳/۲۸
P3	۲/۵۱	۰/۷۳	۱/۸	۱/۷۶	۱/۹۷
EXP	۲/۸۲	۵/۰۷	۶/۶۱	۲/۵۵	۴/۵۲

* اعداد زیر خط دار، نشان‌دهنده بهترین توزیع در هر ایستگاه هستند.

مقادیر MAE در جدول شماره (۴) نشان می‌دهد که در ایستگاه‌های آبعلی و شمال تهران توزیع لجستیک تعمیم‌یافته، در ایستگاه کرج توزیع پارتو تعمیم‌یافته، در ایستگاه مهرآباد توزیع پیرسون و در ایستگاه دوشان تپه توزیع نرمال به عنوان توزیع برتر انتخاب گردید.

جدول ۴- مقادیر MAE برای توزیع‌های مختلف به تفکیک در ایستگاه‌های منطقه مورد مطالعه

توزیع	آبعلی	دوشان تپه	شمال تهران	مهرآباد	کرج
GEV	۲/۰۳	۰/۵۸	۲/۲۶	۱/۱۹	۱/۳۸
GPA	۲/۰۲	۰/۶۶	۳	۱/۲۰	۱/۲۷
GLOG	۱/۷۰	۰/۷۸	۱/۴۵	۱/۳۰	۱/۷۷
LN3	۲/۴۲	۰/۵۷	۲/۴۵	۱/۱۸	۱/۳۴
GUM	۲/۱۴	۱/۷۸	۳/۰۲	۱/۱۵	۱/۳۷
LP3	۲/۴۰	۰/۵۸	۲/۵۶	۱/۰۶	۲/۸۳
LN2	۲/۰۱	۱/۴۲	۲/۸۳	۱/۰۹	۱/۳۱
N	۲/۹۸	۰/۴۲	۲/۱۰	۲/۶۳	۲/۳۳
P3	۲/۲۴	۰/۶۱	۱/۵۶	۰/۹۹	۱/۷۷
EXP	۲/۶۸	۴/۰۸	۶/۲۷	۱/۸۶	۴/۰۴

* اعداد زیر خط دار، نشان‌دهنده بهترین توزیع در هر ایستگاه هستند.

با استفاده از نتایج آماره R^2 در جدول شماره (۵)، مشاهده می‌گردد، که اکثر توزیع‌ها دارای درصد بالایی از همبستگی می‌باشند و به عنوان توزیع برتر برگزیده شده‌اند.

جدول ۵- مقادیر R^2 برای توزیع‌های مختلف به تفکیک در ایستگاه‌های منطقه مورد مطالعه

توزیع	آبعلی	دوشان تپه	شمال تهران	مهرآباد	کرج
GEV	۰/۹۵	۰/۹۹	۰/۹۶	۰/۹۷	۰/۹۸
GPA	۰/۹۵	۰/۹۷	۰/۸۷	۰/۹۸	۰/۹۷
GLOG	۰/۹۵	۰/۹۷	۰/۹۹	۰/۹۶	۰/۹۸
LN3	۰/۹۳	۰/۹۹	۰/۹۵	۰/۹۷	۰/۹۸
GUM	۰/۹۵	۰/۹۶	۰/۹۹	۰/۹۷	۰/۹۸
LP3	۰/۹۵	۰/۹۹	۰/۹۲	۰/۹۷	۰/۹۷
LN2	۰/۹۵	۰/۹۷	۰/۹۹	۰/۹۷	۰/۹۸
N	۰/۹۳	۰/۹۹	۰/۹۷	۰/۹۷	۰/۹۸
P3	۰/۹۵	۰/۹۹	۰/۹۷	۰/۹۷	۰/۹۸
EXP	۰/۹۵	۰/۹۴	۰/۹۹	۰/۹۶	۰/۹۴

* اعداد زیر خطدار، نشان‌دهنده بهترین توزیع در هر ایستگاه هستند.

مقادیر آریبی در جدول شماره (۶) نشان می‌دهد که در ایستگاه‌های کرج و شمال تهران توزیع پیرسون، در ایستگاه آبعلی توزیع پارتو تعمیم‌یافته، در ایستگاه مهرآباد توزیع تعمیم یافته به عنوان توزیع برتر انتخاب گردید.

جدول ۶- مقادیر Bias برای توزیع‌های مختلف به تفکیک در ایستگاه‌های منطقه مورد مطالعه

توزیع	آبعلی	دوشان تپه	شمال تهران	مهرآباد	کرج
GEV	-۰/۴۵	۰/۲۳	۱/۷۴	-۰/۱۹	-۰/۳۶
GPA	۰/۱۲	۰/۰۹	۰/۹۳	۰/۲۸	۰/۴۱
GLOG	-۱/۱۳	۰/۰۱	۱/۴۰	-۰/۷۵	-۱/۰۴
LN3	-۰/۵۳	۰/۱۷	۲/۰۳	-۰/۲۶	-۰/۴۵
GUM	-۰/۳۸	۰/۷۲	۲/۶۴	-۰/۷۶	-۰/۳۵
LP3	۰/۱۶	۰/۲۱	۰/۳۲	-۰/۶۵	۰/۸۷
LN2	-۰/۵۲	۰/۶۱	۲/۵۵	-۰/۷۷	-۰/۳۱
N	-۱/۵۲	۰/۰۴	۱/۵۱	-۱/۶۷	-۱/۴۷
P3	-۰/۲۴	۰/۲۰	۰/۸۶	-۰/۶۸	-۰/۰۵
EXP	۱/۴۸	۴/۰۸	۶/۲۶	-۰/۸۵	-۲/۹۱

* اعداد زیر خطدار، نشان‌دهنده بهترین توزیع در هر ایستگاه هستند.

با توجه به نتایج آماره‌های مختلف در جداول (۳) تا (۶)، به تفکیک در هر ایستگاه بهترین توزیع انتخاب شد و از روی مناسب‌ترین توزیع فراوانی، مقادیر بارش حداکثر با دوره بازگشت‌های ۲، ۵، ۱۰، ۲۰ و ۵۰ ساله در هر ایستگاه، برآورد شد که نتایج آن در جدول (۷) ارائه شده است.

جدول ۷- برآورد بارش با دوره بازگشت‌های مختلف با استفاده از توزیع‌های منتخب به تفکیک ایستگاه

ایستگاه	دوره بازگشت				
	۲	۵	۱۰	۲۰	۵۰
آبعلی	۳۹/۶۴	۴۹/۹۰	۵۸/۱۰	۶۳/۷۱	۶۹/۳۴
دوشان‌تپه	۲۶/۱۶	۳۱/۴۶	۳۴/۶۲	۳۷/۵۶	۴۱/۳۵
شمال‌تهران	۳۷/۸۵	۴۶/۶۷	۵۱/۸۸	۵۶/۷۱	۶۲/۸۷
مهرآباد	۲۴/۰۵	۳۴/۲۴	۴۰/۰۹	۴۴/۷۰	۴۹/۳۴
کرج	۲۴/۲۳	۳۶/۱۱	۴۲	۴۸/۲۱	۵۶/۱۹

با کمترین مقدار به عنوان بهترین توزیع در منطقه و توزیع نمایی با بیشترین مقدار به عنوان نامناسب‌ترین توزیع در منطقه انتخاب شد.

نتایج حاصل از آزمون نکویی برازش به روش RRMSE به منظور تعیین مناسب‌ترین تابع توزیع در کل منطقه در جدول شماره (۸) آمده است که توزیع مقادیر حد تعمیم‌یافته

جدول ۸- RRMSEهای محاسبه شده برای توزیع‌های آماری مختلف در منطقه مورد مطالعه

توزیع	RRMSE	توزیع	RRMSE
GEV	۰/۰۲۷	GPA	۰/۰۳۱
GLOG	۰/۰۳	LN3	۰/۰۳۱
GUM	۰/۰۵۴	EXP	۰/۰۶۹
LP3	۰/۰۵۴	P3	۰/۰۴۵
LN2	۰/۰۵	N	۰/۰۶۵

نتیجه‌گیری

ایستگاه دوشان‌تپه توزیع لجستیک تعمیم یافته، در ایستگاه شمال‌تهران و کرج توزیع پیرسون نوع سه و در ایستگاه مهرآباد توزیع مقادیر حد به عنوان بهترین توزیع انتخاب شد. با استفاده از نتایج آماره R^2 در جدول شماره (۵)، اکثر توزیع‌ها دارای درصد بالایی از همبستگی می‌باشند و به عنوان توزیع برتر برگزیده شده‌اند در نتیجه چنین استنباط می‌شود که این آماره جهت تعیین توزیع منتخب در منطقه کارایی چندانی ندارد.

با توجه به انواع آماره‌های بکار رفته در این تحقیق، توزیع‌های نامناسب در ایستگاه‌های مختلف به شرح زیر مشخص می‌گردد. در آبعلی و مهرآباد توزیع نرمال و در ایستگاه‌های دوشان‌تپه، شمال‌تهران و کرج توزیع نمایی بعنوان توزیع نامناسب مشخص گردیدند. شایان ذکر است تنها با استفاده از آماره ضریب همبستگی در ایستگاه‌های شمال‌تهران و مهرآباد به ترتیب توزیع‌های پارتو تعمیم یافته و نمایی با کمترین امتیاز، بعنوان توزیع‌های نامناسب مشخص

با توجه به اینکه در بین هیدرولوژیست‌ها هیچ‌گونه توافقی در مورد استفاده از یک تابع توزیع خاص وجود ندارد، ولی می‌توان توزیع مناسب را که نتایج حاصل از آن دارای کمترین خطا و نزدیک به واقعیت است انتخاب کرد. با استفاده از آماره RMSE در مورد بارش‌های حداکثر سالانه در ایستگاه دوشان‌تپه توزیع نرمال، در ایستگاه‌های آبعلی و مهرآباد توزیع پارتو تعمیم یافته، در ایستگاه شمال‌تهران توزیع لجستیک تعمیم یافته و در ایستگاه کرج توزیع لوگ نرمال سه پارامتره با توجه به کمترین مقدار میانگین مربع خطا، به عنوان توزیع مناسب انتخاب شد. همچنین براساس آماره MAE در ایستگاه آبعلی و شمال‌تهران توزیع لجستیک تعمیم یافته، در ایستگاه دوشان‌تپه توزیع نرمال، در ایستگاه مهرآباد توزیع پیرسون نوع سه و در ایستگاه کرج توزیع حد تعمیم یافته، به عنوان بهترین توزیع انتخاب شد. با استفاده از آماره Bias در ایستگاه آبعلی توزیع پارتو تعمیم یافته، در

- ۶- کایت، ج. دبلیو. ۱۳۶۹. تحلیل فراوانی وقایع و ریسک در هیدرولوژی. ترجمه علیزاده و همکاران، انتشارات آستان قدس رضوی، چاپ اول.
- ۷- محمدی خشویی، م. ۱۳۸۷. بررسی کارایی تکنیک گشتاورهای خطی در تجزیه و تحلیل منطقه‌ای فراوانی سیل در حوزه های اصفهان- سیرجان و دشت یزد- اردکان. پایان- نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه یزد.
- ۸- مهدوی، م. ۱۳۸۴. هیدرولوژی کاربردی. انتشارات دانشگاه تهران، جلد دوم، چاپ چهارم.

- 9- Beard, L. R. 1974. Flood frequency techniques. Center of Res. In Water Resour., University of Texas, Austin.
- 10- Campbell, A. J., and R. C. Sidel, 1984. "Prediction of peak flows on small watersheds in Oregon for use in culvert design", Water Resour. Bulletin, Vol. 20, No.1, pp. 9-14
- 11- Cicioni, G., Guiliano, G. and Spaziani, F.M. 1973. Best fitting of probability function to a set of data for flood studies. Flood and Droughts, Proc. 2nd Int. Sump. In Hydrol. 11-13 september, Front Collin, CO. Water Resour. Pub., pp. 304-314.
- 12- Delleur, J.W., A.R RAO, and J.M.Bell. 1988, Criteria for the determination of minimum streamflows. Teach. Rep.C.E-Hse-88-6, School of Civ. Engrg. purdu university, west lafayette, Ind.
- 13- Eliason, J., 1991. "Probable maximum precipitation in Iceland: Station value", Nord. Hydrol. 23(1), pp.49-56.
- 14- Hosking, J. R. M., 1986. The theory of probability weighted moments. Res. Rep. RC 12210, IBM Research Division, Yorktown Heights, NY. 10598.
- 15- Manuel, a., Benson(1959) "Channel- slope factor in flood frequency analysis". Journal of the hydrolics division. Vol:85, no:HY4,PP.1-9.
- 16- McCuen, R. H., 1979. "Statistical terminology: definitions and interpretation for flood peak estimation", Water Resour. Bulletin, Vol. 15, No. 4. PP. 1106-1116.
- 17- Modarres, R., 2006. Regional precipitation climates of Iran. Journal of Hydrology-New Zealand, 45, 13-27
- 18- Peel, M. C., Wang, Q, J., Vogel, R. M., McMahan, T. A., 2001. The utility of Lmoment ratio diagrams for selecting a regional probability distribution. Hydrol. Sci. J. 46(1), 147-155.
- 19- Vogel, R. M., Fennessey, N. M., 1993. L-moment diagram should replace product moment diagram. Water Resources Research. 29(6), 1745-1752.
- 20- Vogel, R.M., I. Wilson., 1996. Probability Distribution of annual Maximum, Mean and Minimum streamflows in the united states. Journal of hydrologic engineering ,.1(2): 69-76.

گردیدند. سرانجام برای تعیین بهترین توزیع در هر ایستگاه، با توجه به برآیند آماره‌های مختلف، به تفکیک در ایستگاه آبعلی و مهرآباد توزیع پارتو تعمیم یافته، در ایستگاه شمال تهران توزیع لجستیک تعمیم یافته و در ایستگاه کرج توزیع لوگ نرمال سه پارامتره به عنوان توزیع برتر انتخاب شد. در همین راستا هرچند در ایستگاه دوشان تپه توزیع نرمال بعنوان بهترین توزیع انتخاب گردید، ولی با توجه به نتیجه کلی مبنی بر نامناسب بودن دو توزیع نرمال و توزیع نمایی در منطقه، برای این ایستگاه فقط بر مبنای آماره آریبی، بهترین توزیع توزیع لجستیک تعمیم یافته معرفی می گردد. در پایان در کل ایستگاه‌های مورد مطالعه در منطقه به تفکیک برای هر ۱۰ توزیع نامبرده شده مقدار RRMSE با دوره بازگشت‌های مختلف بدست آمد، که توزیع مقادیر حد تعمیم یافته با توجه به کمترین مقدار RRMSE به عنوان بهترین توزیع غالب منطقه‌ای انتخاب شد.

منابع

- ۱- اسلامیان، س. س.، چاوشی، س. ۱۳۸۲. کاربرد تئوری گشتاورهای خطی در تحلیل تناوب سیل حوضه‌های آبخیز ایران مرکزی. مجله علوم و فنون کشاورزی و منابع طبیعی. سال هفتم، شماره اول، ۱-۱۵
- ۲- رستمی، ر. ۱۳۸۴. آنالیز فراوانی سیل منطقه‌ای با استفاده از گشتاورهای خطی و مقایسه آن با گشتاورهای معمولی و ماکزیمم درست نمایی (مطالعه موردی حوزه هلیل رود و حوزه‌های آذربایجان غربی). پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه باهنر کرمان.
- ۳- زارعی، ع. ۱۳۷۸. ارزیابی روش‌های تحلیل منطقه‌ای فراوانی جریان کم در حوزه آبریز مازندران. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده عمران.
- ۴- علیزاده، ا. ۱۳۸۳. اصول هیدرولوژی کاربردی. انتشارات آستان قدس رضوی، چاپ هفدهم.
- ۵- غلامی، ع. ۱۳۷۹. بررسی توزیع‌های احتمالی مناسب برای دبی‌های حداقل، میانگین و حداکثر با استفاده از روش گشتاور خطی (مطالعه موردی مازندران). پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس (نور).

models for groundwater levels: A case study in Western Jilin Province, China. *Journal of Arid Environments* 73., 487–492.

21- Vogel, R.M., T.A. Mc Mahon and F.H.S. Chiew., 1993. Flood flow frequency model selection in Australia. *J. Hyd.*, 146: 421-449.

22- Yang, Z.P., Lu,W.X., Long, Y.Q., 2009. Application and comparison of two prediction